DM1 : Algèbre linéaire et Intégration

PEIP 1ère année, Montpellier

8 avril 2019

Exercice 1. *Application de la diagonalisation.*
On note $\mathcal{C}$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\pi & 0 & 2\pi \\ -\pi - 1 & 1 & 1+\pi \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les racines $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ du polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_3)$, où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

2. Calculer une base de $E_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i \mathbb{I}_3)$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

3. Montrer que la réunion des bases de E_1, E_2 et E_3 forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}$.

4. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$ et D la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

- **a.** Calculer P. Quel est le lien entre P et les espaces E_1, E_2, E_3 ?
- **b.** Calculer D. Quel est le lien entre D et P_A ?
- **c.** Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. En déduire la matrice de Φ^n dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. *L'indicatrice des rationnels.*
On définit l'application $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $(g, h) \in \mathcal{E}([0, 1])$ tel que $g \leq f \leq h$.

1. Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à g et h. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

- **a.** Montrer que $h(x) \geq 1$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$.
  Indication : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Q},\ x < q < y$.
- **b.** Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$.
  Indication : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Longrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q},\ x < s < y$.

2. En déduire que $\int_0^1 (h - g)(x)dx \geq 1$.

3. Conclure en montrant que $f \notin \mathcal{L}^1([0, 1])$.

Exercice 3. *Primitive de* $\ln^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \ln^n(x)$.

1. Montrer que $\int_0^x f_{n+1}(t)dt = x \ln^{n+1}(x) - (n+1) \int_0^x f_n(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire les primitives de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculer la primitive de f_n s'annulant en e pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.